令和５年度入学試験問題

数　　　学　（理，医，歯，工学部）

注　意　事　項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で６ページある。（落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。）

別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された２箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科，選抜方法により解答すべき問題（○印），解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部（学科，選抜方法）	解答すべき問題（○印）						解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5	6		
理学部（理数重点選抜）及び工学部	○	○	○	○	○		５枚	120分
理学部（野外科学志向選抜）及び医学部（保健学科）	○	○	○	○			４枚	90分
医学部（医学科）			○	○	○	○	４枚	90分
歯学部		○	○	○	○		４枚	90分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

1 a は $1 \leqq a \leqq 4$ を満たす定数とする。点 A を $(a, 0)$，点 B を (a, a^2)，点 C を $(-1, 1)$，点 D を $(-1, 0)$ とし，曲線 E を $y = x^2$ とする。線分 BC と曲線 E で囲まれる図形の面積を S とし，線分 AB，曲線 E，線分 CD，線分 DA で囲まれる図形の面積を T とする。次の問いに答えよ。

(1) S と T が等しくなるときの a の値を求めよ。

(2) S と T の差が最大となるときの a の値を求めよ。

2 一辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 AB，BC，CD，DA，AC，BD の中点をそれぞれ P，Q，R，S，T，U とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PR の長さを求めよ。

(2) $\cos \angle \mathrm{SBR}$ の値を求めよ。

(3) 四角形 PTRU を底面，点 Q を頂点とする四角錐の体積を求めよ。

3

k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合 A, B を次のように定める。

$$A = \{x \mid x^3 - x^2 - (k^2 + 4k + 4)x + k^2 + 4k + 4 = 0\}$$
$$B = \{x \mid x^3 - (k^2 + 3k + 3)x^2 + k^2 x - k^4 - 3k^3 - 3k^2 = 0\}$$

次の問いに答えよ。

(1) $k = -1$ のとき，集合 A, B, $A \cap B$, $A \cup B$ を，$\{a,\ b,\ c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2) 集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3) 集合 $A \cup B$ の要素の個数を求めよ。

◇M3(244—62)

$\boxed{4}$ a, b を正の数とし，座標平面上の曲線

$$C_1 \colon y = e^{ax}, \qquad C_2 \colon y = \sqrt{2x - b}$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = e^{ax}$ と関数 $y = \sqrt{2x - b}$ の導関数を求めよ。

(2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 が 1 点 P を共有し，その点において共通の接線をもつとする。このとき，b と点 P の座標を a を用いて表せ。

(3) (2) において，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形の面積を a を用いて表せ。

5 複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとし，$w = -\dfrac{2(2z-i)}{z+1} \quad (z \neq -1)$ とする。ただし，i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1) $z = i$ のときの w の実部と虚部を求めよ。

(2) z を w を用いて表せ。

(3) 点 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4) $|w|$ の最小値とそれを与える z を求めよ。

6

座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(1, -1, 1)$，$\mathrm{B}(1, -1, 5)$ を直径の両端とする球面を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 球面 S の中心 C の座標と，S の方程式を求めよ。

(2) 点 P が S 上を動くとき，$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積の最大値を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{Q}(x, y, z)$ が $\angle\mathrm{QCA} = \dfrac{\pi}{3}$ かつ $y \geqq 0$ を満たしながら S 上を動く。点 $\mathrm{R}(1+\sqrt{2}, 0, 4)$ に対して，内積 $\overrightarrow{\mathrm{CQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CR}}$ のとりうる値の範囲を求めよ。