令和７年度入学試験問題

数　　学

（理学部，工学部，歯学部，医学部（医学科，保健学科放射線技術科学専攻））

注 意 事 項

1　この問題冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはならない。

2　問題冊子は，全部で６ページある。（落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがあった場合は申し出ること。）

別に解答用紙がある。

3　**解答はすべて，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定と異なる解答用紙に記入された解答は零点となる。**

4　受験番号は，各解答用紙の指定された２箇所に必ず記入すること。

5　受験学部，学科，専攻，選抜方法により解答すべき問題（○印），解答用紙の枚数及び解答時間は，下表のとおりである。

受験学部（学科，専攻，選抜方法）	解答すべき問題（○印）						解答用紙の枚数	解答時間
	1	2	3	4	5	6		
理学部（理数重点選抜）及び工学部	○	○	○	○	○		5 枚	120 分
理学部（野外科学志向選抜）及び医学部（保健学科放射線技術科学専攻）	○	○	○	○			4 枚	90 分
歯学部		○	○	○	○		4 枚	90 分
医学部（医学科）			○	○	○	○	4 枚	90 分

6　下書きは，問題冊子の余白を使用すること。

7　問題冊子は，持ち帰ること。

1 座標平面上の原点を O とし，1 点 $\mathrm{A}(a, -1)$ をとる。ただし，$a > 0$ とする。また，放物線 $y = x^2$ 上に点 B をとる。ただし，B は原点以外の点とする。次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が垂直になるときの点 B の座標を a を用いて表せ。また，そのときの三角形 OAB の面積 S を a を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が最大になるときの点 B の座標を a を用いて表せ。また，そのときの三角形 OAB の面積 T を a を用いて表せ。

(3) S と T は，(1) と (2) で求めたものとする。$S = 3T$ となるときの点 A の座標を求めよ。

2

実数 t に対して，

$$F(t) = \int_0^t e^{-2x} \sin^2 x \, dx$$

とおく。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，関数 $y = e^{-2x} \sin^2 x$ の極値を求めよ。

(2) 実数 t に対して，

$$I(t) = \int_0^t e^{-2x} \cos 2x \, dx, \quad J(t) = \int_0^t e^{-2x} \sin 2x \, dx$$

とおく。このとき，次の 3 つの等式 (a)，(b)，(c) が成り立つことを示せ。

(a) $F(t) = -\dfrac{1}{2} e^{-2t} \sin^2 t + \dfrac{1}{2} J(t)$

(b) $I(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} e^{-2t} \cos 2t - J(t)$

(c) $J(t) = -\dfrac{1}{2} e^{-2t} \sin 2t + I(t)$

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{t \to \infty} F(t)$ を求めよ。

3

2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ に対して，数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。次の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2) 自然数 n に対して，$\alpha^{n+1}-\alpha^n=\alpha^{n-1}$，$\beta^{n+1}-\beta^n=\beta^{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。すなわち，

$$b_n=a_{n+1}-a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。b_1 を求めよ。また，$n\geqq 2$ に対して，$b_n=a_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(4) 自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=a_{n+2}-1$ が成り立つことを示せ。

(5) 自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2=a_na_{n+1}+2$ が成り立つことを示せ。

4

2 つの関数 $f(x)=\log_2 x$，$g(x)=\left|x^2-2x-3\right|-\left|x^2-x\right|$ について，それらの合成関数 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4$ のとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4$ のとき，$h(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 関数 $y=h(x)$ $\left(\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4\right)$ のグラフと直線 $y=1$ の共有点の個数を求めよ。また，共有点の x 座標をすべて求めよ。

(4) a は定数とする。関数 $y=h(x)$ $\left(\dfrac{1}{16}\leqq x\leqq 4\right)$ のグラフと直線 $y=a$ が共有点をもつとき，その共有点の個数を a の値によって場合分けして求めよ。

5

次の条件（☆）を満たす複素数 z を考える。ただし，i は虚数単位とする。

（☆）iz^2 は実数であって，$0 \leqq iz^2 \leqq 2$ である。

次の問いに答えよ。

(1) $iz^2 = 2$ であるときの複素数 z をすべて求めよ。

(2) $0 < iz^2 \leqq 2$ であるときの複素数 z の偏角 θ をすべて求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(3) 条件（☆）を満たす複素数 z 全体の集合を S とする。集合 S を複素数平面上に図示せよ。

(4) 複素数 z が (3) の S を動くとき，$\dfrac{z}{z+2}$ の実部の最小値を求めよ。

6 座標平面上の曲線 $y = x\sin^2 x$ を C とする。自然数 n に対して，曲線 C 上に点 $\mathrm{P}_n(n\pi, 0)$，点 $\mathrm{Q}_n\left(\dfrac{2n-1}{2}\pi, \dfrac{2n-1}{2}\pi\right)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 P_n における接線の方程式を求めよ。また，曲線 C 上の点 Q_n における接線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ で囲まれる部分の面積 S_n を n を用いて表せ。

(3) 曲線 C と線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ で囲まれる部分の面積 T_n を n を用いて表せ。

(4) S_n と T_n は，(2) と (3) で求めたものとする。極限値

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{k} S_n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{k} T_n}$$

を求めよ。